『契約の経済理論』練習問題*

伊藤秀史

2005 年 4 月 15 日

注意：ページ数が記されている問題は，『契約の経済理論』の本文ないしは脚注で (練習問題) として与えられている問題です.

第 1 章　アドバース・セレクションの基本モデル

問題 1.1 (p.26)

1.1 節の部品調達の問題で，セカンドベストの解におけるメーカーの期待利得を p の関数とみなすと，p の増加関数であることを示してください.

問題 1.2 (p.49 脚注)

1.4 節のタイプが無限のケースにおいて，目的関数を書き直す時に，(1.31) 式の左辺の $U(s)$ に (EC') を代入し積分順序を交換することによって，(1.31) 式の右辺を導出してください.

問題 1.3

1. 『契約の経済理論』第 1 章 1.2.2 節にある非線形価格の例で $u(x,\theta) = \theta x$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$, $0 < \theta_0 < \theta_1$ と仮定して，1.1 節と同様の分析によって，どちらのタイプにも参加させる場合の最適契約を導出してください.
2. (続き) 上記の例で，タイプ θ_0 には参加させないことが望ましくなる可能性があることを示してください.
3. 第 1 章 1.4.3 節の□調達問題の項目で与えられているように，1.1 節の例をタイプが連続変数であるケースに拡張します ($c(x,\theta) = \theta x$ と仮定します). そして 1.4.1 節，1.4.2 節に対応する分析を行ってください.

問題 1.4

プリンシパルは政府，エージェントは被規制企業．企業の生産量を q，生産費用を $c(q,\theta) = \theta q$ とします．政府は製品の生産量 q と企業への補助金 t を設計します．被規制企業の効用 (利潤) は $U = t - c(q,\theta)$ となります．粗消費者余剰を $s(q)$ とすると，政府の効用は $V = s(q) - (1+\lambda)t + U$ と書けます．ただし $s(q)$ は生産 q からもたらされる粗消費者余剰，λ は徴税システムの非効率性を表す正の定数です．被規制企業の留保効用はゼロです.

---

* Thanks to Akifumi Ishihara.

簡単化のために $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ で $0 < \theta_0 < \theta_1$，さらに $c(q, \theta_i) = \theta_i q$ を仮定します．

(a) θ_i が政府に観察可能な場合のベンチマークの解を導出して下さい．

(b) θ_i が観察不可能な場合の最適契約を導出して下さい．ただし政府はどちらのタイプの企業にも生産させると仮定して下さい．

問題 1.5

プリンシパルは政府，エージェントは被規制企業で，タイプ θ_i $(i = 0, 1)$ の企業の生産費用は $c(q) = c_i q + F$ で与えられます．ここで $F > 0$ は固定費用，c_i は限界費用 (一定) で，限界費用 c_i は $0 < c_0 < c_1$ を満たします．

価格を p，需要関数を $Q(p)$ で表します．ただし $Q(\cdot)$ は $Q(0) = \overline{q} > 0$ を満たし，ある $\overline{p} > c_1$ が存在して $Q(\overline{p}) = 0$ を仮定します．また $Q'(p) < 0$ for all $p \in (0, \overline{p})$ です．

タイプ θ_i の企業の効用は $U_i = t + (p - c_i)Q(p) - F$ で与えられます．ここで t は政府から企業への移転額です．一方政府の効用は

$$V = s(p) - t + \alpha U_i = s(p) + (p - c_i)Q(p) - F - (1 - \alpha)U_i$$

で与えられます．ここで $s(p)$ は粗消費者余剰で，

$$s(p) = \int_p^{\overline{p}} Q(\tilde{p}) d\tilde{p}$$

と定義されます．また α は生産者余剰 U_i へのウェイトで，$0 \leq \alpha < 1$ を仮定します．

(a) θ_i が政府に観察可能な場合のベンチマークの解は限界費用価格 $p_i^{fb} = c_i$ かつ $t_i^{fb} = F$ となることを示して下さい．

(b) θ_i が観察不可能な場合の最適契約を導出して下さい．ただし政府はどちらのタイプの企業にも生産させると仮定して下さい．

第 2 章　アドバース・セレクションのモデル：バリエーションと拡張

問題 2.1 (p.60 脚注)

2.1 節の Laffont and Tirole の規制モデルで，生産費用が $C = \theta - a + \epsilon$ (ϵ は平均 0 の撹乱項) であっても，タイプが対称情報時には固定価格契約によってファーストベストの努力と移転額を達成できることを示してください．

問題 2.2 (p.62)

タイプが 2 種類のケースの規制モデルの最適契約を導出してください．

問題 2.3

プリンシパルは政府 (または保険会社)，エージェントは医療機関とします．医療機関は患者の重症度 θ を私的情報として持っています．医療機関の治療費用は $c(e, \theta)$ で，e は医療機関による費用削減努力を表します．

ただし**費用も**努力も政府に観察不可能で，医療機関は努力の費用 $d(e)$ を負担しなければなりません．政府が設計するのは診療報酬 $t = (1 - r)c + w$ で，w は定額報酬，r は治療費用のうち医療機関が負担する割合を表します．医療機関の効用は $U = w - rc(e, \theta) - d(e)$，政府の効用は $V = -(1 - r)c(e, \theta) - w$ で与えられます．医療機関の留保効用はゼロです．

簡単化のために $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ で $1 < \theta_0 < \theta_1$，$d(e) = e^2/2$，$c(e, \theta_i) = \theta_i - e$ と仮定します．$\theta = \theta_i$ の確率を ϕ_i で表します．

(a) θ_i が政府に観察可能な場合のベンチマークの解を導出して下さい．

(b) θ_i が観察不可能な場合の最適契約を導出して下さい．ただし政府はどちらのタイプの医療機関にも参加させると仮定して下さい．

問題 2.4

次のようなプリンシパル (企業，雇用主，経営者) とエージェント (従業員) の関係を考えます．従業員の立証可能なアウトプットは $x = a + \theta$ で，$a \geq 0$ は従業員の努力，θ は従業員の能力で，彼の私的情報 (タイプ) です．$\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$，$\theta_0 < \theta_1$，$0 < \Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 < 1/2$ を仮定します．従業員のタイプが θ_1 である確率は $p = 1/2$，従業員の努力の私的費用は $d(a) = a^2/2$ と仮定します．企業から支払われる賃金が w のとき，従業員の利得は $U = w - d(a)$ となります．従業員は利得が非負であれば，企業の契約を受け入れます．企業の利得は $V = x - w$ となります．

企業の提示する契約は $\{(w_0, x_0), (w_1, x_1)\}$ と書ける．もしも従業員のタイプおよび努力が立証可能ならば，ファーストベストの契約は $\max_(a_0, a_1)(1/2)(a_1 + \theta_1 - d(a_1)) + (1/2)(a_0 + \theta_0 - d(a_0))$ を解くことによって求められます．

(a) ファーストベストの解 $a_0^{fb}, a_1^{fb}, w_0^{fb}, w_1^{fb}$ を求めてください．

従業員のタイプも努力も観察不可能なセカンドベストの状況では，タイプ θ_1 の (IC_1)，すなわち $w_1 - d(a_1) \geq w_0 - d(a_0 - \Delta\theta)$ が有効 (binding) となり，$\Psi(a_0) = w_1 - d(a_1) = d(a_0) - d(a_0 - \Delta\theta)$ と定義すると，$\Psi(a_0)$ がタイプ θ_1 のレントとなります．$V^*(a) = V^{fb}(a) - p\Psi(a)$ とすると，タイプ θ_0 のセカンドベストの努力 a_0^* は，$\max_a V^*(a)$ の解となり，以下の式で与えられます．

$$1 - d'(a_0^*) = \frac{p}{1 - p}[d'(a_0^*) - d'(a_0^* - \Delta\theta)]$$

(b) $a_0^*, a_1^*, w_0^*, w_1^*$ を求めてください．

このモデルに，Supervisor (S) を導入します．S の得る情報 σ は，σ_0, σ_1 のいずれかで，$\Pr\{\sigma = \sigma_0 \mid \theta_0\} = \Pr\{\sigma = \sigma_1 \mid \theta_1\} = q$，$\Pr\{\sigma = \sigma_1 \mid \theta_0\} = \Pr\{\sigma = \sigma_0 \mid \theta_1\} = 1 - q$，$1/2 < q < 1$ と仮定します．つまり S の情報は不完全で，真のタイプが θ_i のときに 1/2 より高い確率で σ_i という (正しい) 情報を得ますが，確率 $1 - q$ で誤った情報 σ_j ($j \neq i$) を得る可能性もあります．

まず S は A と共謀する可能性がないベンチマーク・ケースを分析します．タイミングは以下の通りです．

1. A が自分のタイプを観察する．
2. P が契約を A と S に提示する．
3. A が a を選択し，x が実現して P に観察される (x は立証可能)．

4. P は S による監査を行うかどうかを決定し，行う場合には情報を S から得る．

P の契約の内容は次の通りです．まず A に対する誘因両立的な直接表明メカニズム $\{(a_0, w_0), (a_1, w_1)\}$．ここで (a_i, w_i) は，A がタイプ θ_i であると報告したときに指定する行動と支払額です．第 2 に S による監査についてですが，次のようなルールを決めると仮定します．A のインセンティブの問題はタイプ θ_1 が θ_0 のふりをしようとする点にあるので，アウトプットが x_0 のときには確率 s で監査を行い，情報 σ を入手します．そしてもしも $\sigma = \sigma_1$ ならば，A にペナルティ π を課します (このペナルティは P の収入となります)．つまり P が決定するルールは (s, π) となります．ただし可能な最大のペナルティ水準が存在し，$\overline{\pi}$ と記します．よって $\pi \leq \overline{\pi}$ が満たされなければなりません．

(c) A の参加制約および誘因両立制約を明示して，P の最適契約設計問題 (以上の制約下で P の期待利得を最大にする問題) を書いてください．
(d) 最適契約は $\pi = \overline{\pi}$ を満たすと仮定しても一般性を失わないことを示してください．この特徴は最大抑止原理 (principle of maximum deterrence) と呼ばれています．

以下の分析では，タイプ θ_0 に対する誘因両立制約を無視して行います．この制約は有効でない (nonbinding) ので，無視して解いた契約がこの制約を満たすことを，あとで確認することができます．

(e) 最適解はタイプ θ_0 の参加制約を等号で満たすことを示してください．
(f) 最適解は $s = 1$ を満たす，すなわち必ず S による監査を行うことを示してください．
(g) 最適契約を求めてください．残された制約式に対してラグランジュ乗数を与えてキューン・タッカー条件を導出することによって解くことができます．

次に S が A と共謀する可能性を考察します (よって $s = 1$ 等これまでの結果が成り立つとは限りません)．A が行動 a を選択した後に S と A は情報 σ を観察し，別契約を結びます．この別契約は強制可能と仮定します．S は真の情報が σ_i のときに σ_j であるという報告を行います ($j \neq i$)．

(h) どういう状態のときに共謀するインセンティブがあるのかを論じてください．
(i) 共謀を防止するために，P は S による監査を行い，S が σ_1 を報告したときにはボーナス b を S に支払うと仮定します．共謀を防止するために b が満たすべき条件 (共謀防止制約) を求めてください．

第 3 章　複数エージェントのアドバース・セレクション

問題 3.1 (p.140)

3.4.2 節の組織と情報構造のデザインについて，情報分散の場合に比べ情報連結の場合の方が，メーカーにとってレント削減と品質の効率性が望ましくなることを示してください．(問題補足：この問題は $b'(\cdot)$ が (弱い意味で) 凸であるという仮定 (すなわち $b'''(\cdot) \geq 0$) が必要になります．)

問題 3.2

プリンシパルと 2 人のエージェントとの関係を考える．それぞれのエージェントのタイプは確率 p で θ_0，$1 - p$ で θ_1 である (エージェントのタイプ間は独立)．$0 < p < 1$ を仮定する．タイプ θ_i のエージェントは，ア

ウトプット $x \geq 0$ を費用 $c_i(x)$ で生産する．ここで任意の $i = 0, 1$ について $c_i(0) = c_i'(0) = 0$ および，任意の $x > 0$ について $c_0(x) < c_1(x)$ かつ $0 < c_0'(x) < c_1'(x)$ を仮定する．さらに $c_i(\cdot)$ は厳密に凸で，以下では内点解の存在を仮定してかまわない．

エージェントのタイプはプリンシパルには観察不可能である．各エージェントが自分のタイプを知った後に，プリンシパルは次のような取引を行う．まずプリンシパルは各エージェントに契約を提示し，各エージェントは契約を受け入れるかどうかを決定する．少なくとも一方のエージェントが拒否した場合にはゲームは終了し，各エージェントは留保効用ゼロを得る．両者が受け入れると，次のような手順で報告が行われる．まずプリンシパルはエージェント 1 にタイプを報告させ，その報告はエージェント 2 にも観察される．そして契約にしたがってエージェント 1 は生産を行い支払額を受け取る．次にプリンシパルはエージェント 2 にタイプを報告させる．ただしこの時点でエージェント 2 は契約を破棄して留保効用ゼロを受け取ることができると仮定する．契約を破棄せずに報告を行ったならば，エージェント 2 は契約にしたがって生産を行い支払額を受け取る．

エージェント 1 の契約は $\gamma^1 = \{(x_0, w_0), (x_1, w_1)\}$ という形式である．ここで x_i, w_i は，タイプ i と報告したエージェント 1 に指定するアウトプットと支払額である．真のタイプが θ_k のとき，エージェント 1 の利得は $w_i - c_k(x_i)$ となる．

一方エージェント 2 の契約は，$\gamma^2 = \{\gamma_0^2, \gamma_1^2\}$ という形式で，$\gamma_i^2 = \{(x_{i0}, w_{i0}), (x_{i1}, w_{i1})\}$ である．エージェント 2 がタイプ θ_j と報告すると，プリンシパルはアウトプット x_{ij} および支払額 w_{ij} を指定する．エージェント 2 の真のタイプが θ_k のとき，エージェント 2 の利得は $w_{ij} - c_k(x_{ij})$ となる．

エージェント 1 がタイプ θ_i，エージェント 2 がタイプ j と報告したときのプリンシパルの利得は $(x_i - w_i) + (x_{ij} - w_{ij})$ で与えられる．以下では，プリンシパルはすべてのタイプのエージェントに参加させることを選好すると仮定せよ．

(a) エージェント 1 および 2 に提示する最適契約は同一で，あたかもひとりのエージェントしかいないときの最適契約と等しいことを示し，最適契約を特徴づけよ (最適契約の特徴については導出過程を省略し，結果のみ答えればよい)．

以上のモデルを次のように変更する．エージェント 2 がタイプ θ_0 のときには，その知識をエージェント 1 に伝えることによって，タイプ θ_1 のエージェント 1 をタイプ θ_0 に変えることができる．ただしエージェント 1 がはじめからタイプ θ_0 のときには，知識伝達の効果はない．またこの知識伝達のコストはかからないと仮定する．しかし，知識を伝達するかどうかはプリンシパルには観察不可能なエージェント 2 の決定事項で，知識伝達のための適切なインセンティブを与える必要がある．なお，上記のケース以外 (たとえばエージェント 1 がタイプ θ_0 でエージェント 2 がタイプ θ_1 のとき等) では知識の伝達によるタイプの変化はない．なお知識伝達は，各エージェントに契約が提示された後，エージェント 1 が受け入れるかどうかを決定する前に行われる．よってエージェント 1 は，契約を受け入れるかどうかを決定する段階で，自分のタイプが θ_1 から θ_0 に変わったことを知ることができる．エージェント 1 が知識を拒否する可能性はないと仮定せよ．

(b) 以上の変更の下で最適契約を導出して，結果を解釈せよ．

- ヒント
  - エージェント 2 が知識伝達を行うような誘因両立的な契約を設計したならば，エージェント 1 がタイプ θ_1 であると報告した場合にはエージェント 2 のタイプも θ_1 であるということがプリンシパルにわかるので，(x_{11}, w_{11}) については通常の誘因両立制約を課す必要はない．

- ▹ 上記の点を考慮すると，制約式は 10 本ある (エージェント 1 については標準的な 4 本である．エージェント 2 については，知識の伝達を行うインセンティブを与える制約式も必要となる).
- ▹ どの制約式が bind するかは標準的なモデルと同様だが，上記の知識伝達の制約が bind する．これを証明すること．

問題 3.3

『契約の経済理論』第 3 章 3.1.2 節の例 2 のモデルを次のように変更する．サプライヤー 1 は一次サプライヤーで，メーカーとのコミュニケーションが可能だが，サプライヤー 2 は二次サプライヤーで，メーカーとの直接的コミュニケーションはできない．その結果，サプライヤー 1 はメーカーに報告することができるが，サプライヤー 2 はできない．さらに，各サプライヤーは契約締結前に，互いに相手のタイプも観察できると仮定する．

以上の変更の結果，プリンシパルはサプライヤー 1 に，両方のサプライヤーのタイプを報告させ，その報告に基づいて品質と支払額を指定する契約を提示する (表明原理によって，そのような契約に限定して一般性を失わない).

(a) プリンシパルの最適契約を求める問題を定式化せよ．変更前の問題 (104 ページの問題 (p2)) と比べて，何が変わったのかを説明せよ．
(b) サプライヤー 1 にサプライヤー 2 のタイプを正直に報告させるためには，どちらのタイプのサプライヤー 1 の効用もサプライヤー 2 のタイプに依存しないように契約を設計しなければならないことを示せ．
(c) 最適契約を導出せよ．

第 4 章　モラル・ハザードの基本モデル

問題 4.1 (p.173)

4.2.3 節の行動空間が無限のケースで，緩和された問題 (RP) の (RIC) のラグランジェ乗数 μ が (4.22) 式において正になることを，MLRC が成立することから示してください．

問題 4.2 (p.174 脚注)

同じく行動空間が無限のケースで，$d'(0) = 0$ を 満たす時，セカンドベストの契約で $C(a)$ は $a = 0$ において不連続となるかどうか考えてください．

問題 4.3

マーリーズの正規分布モデルを次のように拡張します．エージェントの立証可能なアウトプット $x = a + \epsilon$ の他に，立証可能な追加情報 y がプリンシパルの契約に利用可能とします．この y は平均ゼロ，分散 σ_y^2 の正規分布にしたがい，かつ x (よって ϵ) と正の相関をしています．相関係数を ρ とします．相関係数は以下のよ

うに定義されます.

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(\epsilon, y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\epsilon)\mathrm{Var}(y)}}$$

分子は ϵ と y の共分散です．定義により $0 \leq \rho \leq 1$ です．以下では $\rho \neq 1$ を仮定します.

プリンシパルの提示する契約は線形で，$w(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma$ を仮定します．エージェントの確実同値額は,

$$\mathrm{CE}_A = E[w(x, y)] - c(a) - \frac{1}{2} r \mathrm{Var}(w(x, y))$$

で，$\mathrm{Var}(w(x, y))$ は

$$\mathrm{Var}(w(x, y)) = \beta^T \Omega \beta$$

で与えられます．ここで $\beta = (\beta_1, \beta_2)$，そして Ω は共分散行列で,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(\epsilon) & \mathrm{Cov}(\epsilon, y) \\ \mathrm{Cov}(\epsilon, y) & \mathrm{Var}(y) \end{pmatrix}$$

で定義されます.

(a) プリンシパルの最適契約設計の問題を定式化せよ.
(b) 最適な β_1, β_2 を導出せよ.
(c) ρ が増加すると β_1, β_2 はどのように変化するか，またその変化が生じる論理を説明せよ.

第 5 章　モラル・ハザードのモデル：バリエーションと拡張

第 6 章　複数エージェントのモラル・ハザード

問題 6.1 (p.240)

パートナーシップにおいて行動が完全補完的であるとき，分配ルールが $w_n(x) = \lambda_n a_n^{fb} x$ の時のエージェントの行動選択のための最大化問題の解が，ファーストベストとなることを導出してください.

問題 6.2

プリンシパルがあるプロジェクトをエージェントに任せようとしています．プロジェクトからえられる立証可能な利益は $x = a_1 + a_2 + \epsilon$ で与えられます．ここで a_i は i 番目の職務での行動，ϵ は平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布にしたがいます．エージェントはリスク回避的で，効用は $u(w - c(a_1, a_2))$ で与えられます．ここで $u(z) = -\exp\{-rz\}$ で r は一定の絶対的リスク回避度 $(r > 0)$ です．一方 $c(a_1, a_2)$ は

$$c(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(c a_1^2 + c a_2^2 + 2\delta c a_1 a_2)$$

です．ここで c, δ は定数で，$c > 0$，$0 \leq \delta \leq 1$ を満たします．プリンシパルが提示する契約は線形で，$w(x) = \beta x + \gamma$ を仮定します．エージェントの留保賃金はゼロです.

(a) プリンシパルの最適契約設計の問題を定式化せよ.

(b) 最適な β を導出せよ．

次に，上記のようにひとりのエージェントに 2 種類の職務を任せる代わりに，同質的な 2 人のエージェントを雇い，エージェント i に a_i を決定させる場合を考えます．エージェント i の私的費用は

$$c(a_i) = \frac{1}{2}ca_i^2$$

で与えられます．エージェント i の契約は $w_i(x) = \beta_i x + \gamma_i$ と仮定します．プリンシパルはエージェントに契約を提示し，両方が受け入れると，エージェント i は同時に行動 a_i を選択します．

(c) プリンシパルの最適契約設計の問題を定式化せよ．
(d) 最適な β_1, β_2 を導出せよ．
(e) 次の命題を証明せよ．「ある $\overline{\delta} \in (0,1)$ が存在し，$\delta < \overline{\delta}$ ならばプリンシパルはひとりのエージェントに両方の職務を担当させることを選好するが，$\delta > \overline{\delta}$ ならば 2 人のエージェントを雇う方を選好する.」

第 7 章　ダイナミック・モデル

問題 7.1 (p.276–7)

7.1.2 節のアドバースセレクションの短期契約において，(IC1S1) のみが等号で成立する Case II の契約は最適にならないことを示してください．

第 8 章　複数プリンシパル

問題 8.1 (p.311)

8.1.1 節の政策決定への影響行使のモデルで，対称情報時には政策 a_1 と献金スケジュール $(w^1, w^2) = ((0,x),(y,0))$ (ただし $b_1^1 - b_0^1 \geq x \geq b_0^2 - b_1^2, y = x + \theta(B_1 - B_0)$) が均衡の条件を満たしていることを確認してください．

問題 8.2 (p.329)

8.2.1 節の投資家と企業家の契約のモデルで，$\Delta > 0$ を示してください．

問題 8.3 (p.343–4)

8.2.3 節のマルチタスクモデルにおいて，職務が 2 種類のケースでプリンシパルが 1 人の時は，$i = 1, 2$ において $t_i^* < t_i^{fb}$ となることを示してください．

問題 8.4 (p.344)

8.2.3 節のマルチタスクモデルにおいて，職務が 2 種類のケースでプリンシパルが 2 人の時は，インセンティブ係数を比較すると $i = 1, 2$ に対して $\beta_i < \beta_i^*$ となることを示してください.

第 9 章　不完備契約の理論

問題 9.1 (p.369)

9.3.2 節の関係特殊的投資のモデルで，取引が常に効率的なケースでは $b^{fb} > b_0^*$ かつ $s^{fb} > s_0^*$ となることを示してください.

問題 9.2

9.5.2 節のモデルにおいて，次のようなメカニズムを考えましょう．第 1 期に買手が取引する財を提案します．売手は「合意する」か「合意しない」かを選択します.「合意する」場合にはその財を取引し ($q = 1$)，買手はあらかじめに決められた価格 p_1 を支払います.「合意しない」場合には，財の取引は行わず ($q = 0$)，買手はあらかじめに決められた価格 p_0 を支払います (価格が負の場合には売手から買手への移転価格となります)．これらの価格を以下の条件を満たすように決めておきます.

$$
\begin{aligned}
p_0 &\geq 0 \\
p_1 &= p_0 + c(s^{fb}) + s^{fb} + \epsilon
\end{aligned}
$$

ただし ϵ は十分小さい正の値です．もしもて再交渉を禁止できるか，もしくは買手と売手の間で再交渉しないことにコミットできるならば，このメカニズムによってファーストベストを達成できることを示して下さい.